

Die kritische Schubspannung kubischer Kristalle mit Fehlstellen tetragonaler Symmetrie

II. Der induzierte SNOEK-Effekt *

WERNER FRANK

Institut für Physik am Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart,
und Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. **22 a**, 377—387 [1967] ; eingegangen am 31. Oktober 1966)

In kubischen Kristallen treten zwischen Fehlstellen tetragonaler Symmetrie (elastischen Dipolen) und Versetzungen starke elastische Wechselwirkungskräfte auf. Deshalb tragen elastische Dipole zur kritischen Schubspannung τ_0 bei, indem sie sich in den Spannungsfeldern der Versetzungen energetisch möglichst günstig ausrichten (induzierter SNOEK-Effekt). Dieser τ_0 -Beitrag auf Grund *weitreichender* elastischer Versetzungs-Dipol-Wechselwirkungen wird für mehrere Gleitsysteme und Dipolorientierungen berechnet, welche in kubischen Kristallen vorkommen, und zwar für beliebige Verformungstemperaturen.

1. Einleitung

Nach Teil I¹ liefern Fehlstellen tetragonaler Symmetrie infolge ihrer kurzreichenden elastischen Wechselwirkungen mit Versetzungen einen Beitrag τ_A zur Fließspannung kubischer Kristalle (vgl. auch²). Der durch weitreichende elastische Wechselwirkungen zwischen solchen elastischen Dipolen und Versetzungen über den Mechanismus des induzierten SNOEK-Effektes³ zustande kommende Beitrag τ_B zur Fließspannung⁴⁻⁶ soll im vorliegenden Teil II näher untersucht werden.

2. Physikalische Grundlagen der Schöck-Seegerschen Theorie⁵ über den Beitrag des induzierten Snoek-Effektes zur Fließspannung

Ein Punktfehler, dessen Deformationsfeld tetragonale Symmetrie besitzt, befindet sich in einem Kristall mit kubischer Symmetrie i. allg. in q verschiedenen diskreten Orientierungen im mechanischen Gleichgewicht. Die möglichen Einstellrichtungen eines solchen elastischen Dipols sind kristallographisch gleichwertige Richtungen. Sie sind deshalb in einem Kristall, der — abgesehen von dem einen Dipol — fehlerstellenfrei ist und auf den keine äußeren Kräfte wirken, energetisch gleichwertig und somit mit der gleichen Wahrscheinlichkeit besetzt. Diese Entartung

aller möglichen Dipol-Orientierungen wird beim gewöhnlichen SNOEK-Effekt³ durch äußere Kräfte aufgehoben. Andererseits können aber auch von Kristallbaufehlern herrührende innere Spannungen diese Entartung zunichte machen. Dann liegt der sogen. induzierte oder innere SNOEK-Effekt vor.

Quellen innerer Spannungen sind z. B. die Versetzungen⁷. Im Spannungsfeld einer Versetzung spielt sich deshalb ein induzierter SNOEK-Effekt der im Kristall befindlichen elastischen Dipole ab, d. h. die q möglichen Orientierungsrichtungen der Dipole werden verschieden stark besetzt. Die Dipole wählen nämlich im Spannungsfeld einer Versetzung vorzugsweise diejenigen Orientierungen aus, welche der geringsten freien Enthalpie entsprechen. Andererseits wirkt die Temperaturbewegung diesem Ordnungsstreben entgegen, so daß in hinreichend großer Entfernung von der Versetzung, wo die Wechselwirkungsenergie mit den Dipolen kleiner als kT (k Boltzmann-Konstante; T Temperatur) ist, die Dipole statistisch über die möglichen Orientierungsrichtungen verteilt bleiben. Der induzierte SNOEK-Effekt bewirkt also eine lokale Verminderung der freien Enthalpie in der Umgebung einer Versetzung. Ruhende Versetzungen graben sich auf diese Weise in SNOEK-Potentialmulden (SNOEK-Atmosphären) ein (vgl. Abb. 1). Werden zu Beginn einer plastischen Verformung die Versetzungen in Bewegung gesetzt, so schleppen sie die sich dabei deformierenden SNOEK-

* Dissertation, Teil II, Technische Hochschule, Stuttgart, 1966.

¹ W. FRANK, Z. Naturforschg. **22 a**, 365 [1966]; voranstehende Arbeit. Im folgenden mit I bezeichnet.

² R. L. FLEISCHER, J. Appl. Phys. **33**, 3504 [1962].

³ J. SNOEK, Physica **8**, 711 [1941].

⁴ G. SCHÖCK, Phys. Rev. **102**, 1458 [1956].

⁵ G. SCHÖCK u. A. SEEGER, Acta Met. **7**, 469 [1959].

⁶ J. D. ESHELBY, Phil. Mag. **6**, 953 [1961].

⁷ E. KRÖNER, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer-Verlag, Berlin 1958.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

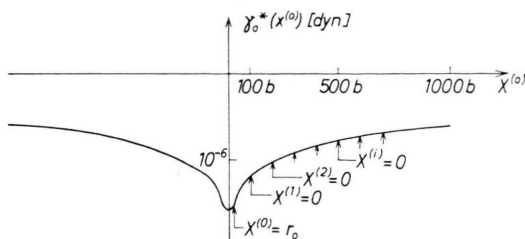


Abb. 1. Auf die Längeneinheit bezogene freie Enthalpie einer bei $x^{(0)}=0$ ruhenden, senkrecht zur Papierebene verlaufenden, geradlinigen Versetzung in α -Eisen (Versetzungsdichte 10^8 cm^{-2}), welche von einer SNOEK-Atmosphäre von gelösten Kohlenstoffatomen (0,01 Atom-%) umgeben ist. Näheres vgl. Abschnitte 2 und 4.

Atmosphären hinterher. Bei hinreichend hoher Startgeschwindigkeit werden jedoch die Versetzungen aus den zunächst praktisch undeformiert bleibenden Potentialmulden herausbewegt. Erst allmählich werden letztere „aufgefüllt“, indem die Temperaturbewegung die Gleichverteilung der Dipole über die möglichen Einstellrichtungen an den Stellen des Kristalls, wo die Versetzungen ursprünglich ruhten, wiederherstellt.

Wir wollen eine geradlinige Versetzung betrachten, deren Lage im Kristall durch eine senkrecht zur Versetzungslinie verlaufende Koordinate $x^{(0)}$ beschrieben wird. Bis zur Zeit $t=0$ (Beginn einer plastischen Verformung) möge die Versetzung an der Stelle $x^{(0)}=0$ ruhen und sich dann mit konstanter Geschwindigkeit u in $+x$ -Richtung bewegen. Nach obigen Überlegungen ist in einem Kristall, welcher außer dieser Versetzung umorientierungsfähige Dipole enthält, die freie Enthalpie γ pro Längeneinheit der Versetzung eine Funktion von $x^{(0)}$ und t :

$$\gamma = \gamma(x^{(0)}, t). \quad (2.1)$$

Befindet sich die Versetzung zur Zeit t an der Stelle $x^{(0)} = x = ut$, so wirkt infolge des inneren SNOEK-Effektes auf ihre Längeneinheit die Kraft

$$K(x) = - \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t=x/u}. \quad (2.2)$$

Diese hängt offenbar nur von der augenblicklichen Lage x der Versetzung ab. Der Beitrag τ_B des inneren SNOEK-Effektes zur Fließspannung ist somit durch die Beziehung

$$\tau_B b = -K(x) = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t=x/u} \quad (2.3)$$

(b Betrag des BURGERS-Vektors) gegeben. Die Fließspannung

$$\tau = \tau_A + \tau_B \quad (2.4)$$

ist also sowohl über τ_A ($\tau_A = \tau_A^{(i)}$; vgl. I) als auch über τ_B von der Lage der Versetzung im Kristall, d. h. von der Ableitung a abhängig. Die gemessene stationäre Fließspannung τ_∞ erhält man aus Gl. (2.4), indem man

$$\tau_A = \tau_A^{(\infty)} \quad \text{und} \quad \tau_B = \frac{1}{b} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=\infty; t=\infty}$$

setzt; die gemessene kritische Schubspannung τ_0 ist das Maximum von $\tau_A + \tau_B$ als Funktion von i bzw. x .

Die Berechnung des Beitrages τ_B zur Fließspannung bzw. zur kritischen Schubspannung, welcher von der weitreichenden Wechselwirkung der Versetzungen mit Fehlstellen tetragonaler Symmetrie herrührt, läuft auf die Ermittlung der Größe $\partial \gamma / \partial x^{(0)}$ hinaus. Hierbei ist zu beachten, daß die bei der obigen qualitativen Diskussion der Einfachheit wegen gemachte Annahme, die Versetzungen bewegten sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit u , nur bei hohen Temperaturen richtig ist, nämlich solange $\tau_A = 0$ ist. Sobald $\tau_A \neq 0$ wird, werden die Versetzungen durch die kurzreichenden Wechselwirkungskräfte, welche von den den Gleitebenen benachbarten Dipolen herrühren, zu einer ruckweisen Bewegung veranlaßt (vgl. I, Abschnitt 7.1). Dies ist bei der Berechnung von $\partial \gamma / \partial x^{(0)}$ zu berücksichtigen.

3. Verallgemeinerung der Schöck-Seegerschen Theorie

3.1. Aufstellung einer Differentialgleichung für die freie Enthalpie γ einer Versetzung mit SNOEK-Atmosphäre

Sind r, φ Polarkoordinaten um die Versetzung in einer Ebene senkrecht zur Versetzungslinie und ist $\varrho(r, \varphi, x, t)$ die Enthalpiedichte pro Volumeinheit an der Stelle r, φ zur Zeit t , falls sich die Versetzung zu diesem Zeitpunkt am Ort $x^{(0)} = x$ befindet, so gilt

$$\gamma(x, t) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_*} \varrho(r, \varphi, x, t) d\varphi dr. \quad (3.1)$$

Die Integration über r ist zwischen den Grenzen $r=0$ und $r=r_*$ durchzuführen, wobei $2r_* = 1/\sqrt{n}$ (n Versetzungsdichte in cm^{-2}) der mittlere Versetzungsabstand ist. $\varrho(r, \varphi, x, t)$ errechnet sich aus

$$\varrho(r, \varphi, x, t) = \sum_{k=1}^q W_k(r, \varphi) C_k(r, \varphi, x, t). \quad (3.2)$$

$W_k(r, \varphi)$ ist die durch (I, 2.6) – (I, 2.6) bedeutet Gl. (2.6) in Teil I – definierte Wechselwirkungs-

energie zwischen einer Versetzung und den in den Orientierungen k sich befindenden Dipolen; $C_k(r, \varphi, x, t)$ ist die Volumkonzentration solcher k -orientierten Dipole. Sie kann aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} = \sum_{l=1}^q (-\omega_{kl} C_k + \omega_{lk} C_l) \quad (3.3)$$

berechnet werden. In dieser bedeutet ω_{kl} die Häufigkeit, mit der ein Dipol aus der Orientierung k in die Orientierung l umklappt. Die genaue Definition von ω_{kl} erhält man aus (I, 7.11), indem man dort die oberen Indizes wegläßt und ${}^{(d)}W_k$ durch $W_k(r, \varphi)$ ersetzt. Durch partielles Ableiten der Gl. (3.2) nach t folgt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \sum_{k=1}^q \left[W_k \sum_{l=1}^q (-\omega_{kl} C_k + \omega_{lk} C_l) \right]. \quad (3.4)$$

Im Anhang 1 wird gezeigt, daß diese Gleichung in guter Näherung nicht nur in dem in ⁵ behandelten Spezialfall, sondern ganz allgemein auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\bar{\nu}(\varrho - \varrho_0), \quad (3.5)$$

$$\bar{\nu} = q^* \beta \nu. \quad (3.5 a)$$

Hierin ist ϱ_0 die Enthalpiedichte, die sich für $t \rightarrow \infty$ einstellt, wenn die Orientierungsverteilung der Dipole eine BOLTZMANN-Verteilung ist, q^* die Zahl der Orientierungsrichtungen, in die ein Dipol aus einer gegebenen Richtung k durch einen einzelnen Umklapp-Prozess hineinklappen kann, β die Zahl der Wege, die mittels eines Umklapp-Prozesses aus einer Orientierung k in eine Orientierung l führen, und ν die Häufigkeit, mit der ein Dipol über einen bestimmten Weg aus einer Orientierung k herausklappen kann. Die genaue Definition von ν kann Gl. (I, 7.11) entnommen werden. Durch Integration der Gl. (3.5) über r und φ ergibt sich nach (3.1)

$$\frac{\partial \gamma(x, t)}{\partial t} = -\bar{\nu}[\gamma(x, t) - \gamma_0]. \quad (3.6)$$

Die Berechnung von $\gamma_0 = \gamma(x, t = \infty)$ erfolgt nach Gl. (3.1). Sie wurde für ein Beispiel (k.r.z. Gitter mit Schraubenversetzungen der Gleitsysteme $\{110\}/\langle 112 \rangle$ und $\langle 100 \rangle$ -Dipolen) im Anhang zu ⁵ vorgenommen. Für drei weitere Fälle sind die γ_0 -Werte in Anhang 2 angegeben.

Neben der freien Enthalpie $\gamma(x^{(0)} = x, t)$, welche eine Versetzung am Ort $x^{(0)} = x$ zur Zeit t in ihrer

eigenen SNOEK-Atmosphäre besitzt, definieren wir im Anschluß an ⁵ die freie Enthalpie $\gamma^*(x^{(0)} = x, t)$, welche dieser Versetzung in einer SNOEK-Wolke inneohnt, die von einer anderen, bei $x^{(0)} = 0$ sich befindlichen Versetzung induziert wird. Überlegungen, die denen bei der Ableitung der Gl. (3.6) entsprechen, zeigen, daß für $\gamma^*(x, t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \gamma^*(x, t)}{\partial t} = -\bar{\nu}[\gamma^*(x, t) - \gamma_0^*(x)] \quad (3.7)$$

gelten muß. Stellt man $\gamma_0^*(x) = \gamma^*(x, t = \infty)$ in der Form

$$\gamma_0^*(x) = \gamma_0 g(x) \quad (3.8)$$

dar, so ist $g(x)$ eine Funktion, welche den Anstieg der freien Enthalpie einer Versetzung in der SNOEK-Wolke einer anderen mit wachsendem Abstand x der Versetzungen für den Fall beschreibt, daß sich die Dipole im Spannungsfeld der wolkenerzeugenden Versetzung bezüglich ihrer möglichen Einstellrichtungen im Gleichgewicht befinden. Für $x = 0$ besitzt $g(x)$ offenbar den Wert 1.

ESHELBY ⁶ hat gezeigt, daß ein physikalisch sinnvoller Ansatz für $g(x)$ für große x wie $\ln(1/x)$ mit wachsendem x abfallen muß und daß ein solcher

$$g(x) = g_0 \ln \left(\frac{r_*^2}{r_0^2 + x^2} \right)^{1/2}, \quad (3.9)$$

$$g_0 = \left(\ln \frac{r_*}{r_0} \right)^{-1}, \quad (3.9 a)$$

ist. r_0 , das physikalisch den Radius der SNOEK-Wolke bedeutet ^{5, 6}, erhält man, indem man γ_0 auf die Form

$$\gamma_0 = \tilde{\gamma}_0 \ln(r_*/r_0) \quad (3.10)$$

bringt (vgl. Anhang 2). $g(x)$ hat an der Stelle $x = r_0$ einen Wendepunkt, $\partial g / \partial x$ ein Maximum.

3.2. Berechnung von τ_B für hohe Temperaturen

Die τ_B -Anteile der stationären Fließspannung τ_∞ und der kritischen Schubspannung τ_0 sollen für das Gebiet hinreichend hoher Temperaturen berechnet werden, in dem $\tau_A = 0$ ist. Hierzu machen wir von den Differentialgleichungen (3.6) und (3.7) für $\gamma(x^{(0)} = x, t)$ bzw. $\gamma^*(x^{(0)} = x, t)$ Gebrauch.

Bei einer plastischen Verformung mit konstanter Abgleitgeschwindigkeit \dot{a} bewegt sich eine Versetzung des Kristalls per definitionem in $+x^{(0)}$ -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit

$$u = \dot{a} / (n b). \quad (3.11)$$

Teilt man die $x^{(0)}$ -Achse in kleine Intervalle $\Delta x^{(0)}$, $\Delta x^{(1)}, \dots, \Delta x^{(i)}, \dots, \Delta x^{(\infty)}$ auf, so kann man diese Bewegung näherungsweise dadurch beschreiben, daß man sagt, die Versetzung durchlaufe die Intervalle $\Delta x^{(i)}$ mit unendlich hoher Geschwindigkeit und verweile jeweils zu Beginn eines solchen Intervalls die Zeit

$$\Delta t^{(i)} = \frac{\Delta x^{(i)}}{u} = \frac{n}{a} \Delta x^{(i)}. \quad (3.12)$$

Im Grenzfall $\Delta x^{(i)} \rightarrow 0$ ergibt sich exakt die gleichförmige Versetzungsbewegung.

Erreicht die Versetzung nach dem Durchlaufen von i solchen Intervallen ($\Delta x^{(0)}$ bis $\Delta x^{(i-1)}$) zur Zeit t den Ort $x^{(0)} = x$, so ist offenbar

$$x = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.13)$$

$$t = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta t^{(j)} \quad \text{für } i = 2, 3, 4, \dots \quad (3.14 \text{ a})$$

$$\text{bzw.} \quad t = 0 \quad \text{für } i = 1. \quad (3.14 \text{ b})$$

Definiert man in Analogie zu (I, 7.7) vermöge

$$x^{(i)} = x^{(0)} - \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.15)$$

neue Koordinaten $x^{(i)}$ und verwendet man analog zu (I, 7.8) die Abkürzungen

$$\Delta \Theta^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta t^{(j)} \quad \text{für } i > 1 \quad (3.16 \text{ a})$$

$$\text{und} \quad \Delta \Theta^{(1)} = 0, \quad (3.16 \text{ b})$$

so gilt für die in Abschnitt 3.1 eingeführte freie Enthalpie einer Versetzung, die sich zur Zeit t am Ort $x^{(0)} = x$ aufhält,

$$\begin{aligned} \gamma(x^{(0)} = x, t) &= \gamma\left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)}, t = \Delta \Theta^{(i)}\right) \\ &= \gamma(x^{(i)} = 0, \tilde{t}^{(i)} = 0). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dabei wurde noch die Abkürzung

$$\tilde{t}^{(i)} = t - \Delta \Theta^{(i)} \quad (3.18)$$

verwendet.

Nach Voraussetzung soll die Versetzung zur Zeit $\tilde{t}^{(i)} = 0$ ohne Zeitverlust von $x^{(i-1)} = 0$ nach $x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}$ springen. Die Versetzung besitzt also am Ort $x^{(i)} = x^{(i-1)} - \Delta x^{(i-1)} = 0$ zur Zeit $\tilde{t}^{(i)} = 0$ diejenige freie Enthalpie $\gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i)} = 0)$, die eine fiktive Versetzung zur Zeit $\tilde{t}^{(i)} = 0$ am Ort $x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}$ in der SNOEK-Wolke der bei $x^{(i-1)} = 0$ befindlichen wirklichen Versetzung besäße. Es gilt demnach

$$\gamma(x^{(i)} = 0, \tilde{t}^{(i)} = 0) = \gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i)} = 0) \quad (3.19)$$

oder nach (3.17)

$$\gamma(x^{(0)} = x, t) = \gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i)} = 0). \quad (3.20)$$

Die Berechnung von $\gamma(x, t)$ ist nach (3.20) auf die Berechnung von

$$\gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i)} = 0) = \gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i-1)} = \Delta t^{(i-1)}) \quad (3.21)$$

zurückgeführt. Diese ist mittels Gl. (3.7) möglich und führt auf

$$\begin{aligned} \gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i-1)} = \Delta t^{(i-1)}) \\ = \gamma_0^*(\Delta x^{(i-1)}) + [\gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i-1)} = 0) - \gamma_0^*(\Delta x^{(i-1)})] \exp(-\bar{\nu} \Delta t^{(i-1)}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Beachtet man Gl. (3.7), so ergibt sich aus (3.20), (3.21) und (3.22)

$$\gamma(x, t) = \gamma_0 \left\{ g(\Delta x^{(i-1)}) + \left[\frac{1}{\gamma_0} \gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i-1)} = 0) - g(\Delta x^{(i-1)}) \right] \right\} \exp(-\bar{\nu} \Delta t^{(i-1)}). \quad (3.23)$$

Die in (3.23) vorkommende Größe

$$\gamma^*(x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}, \tilde{t}^{(i-1)} = 0) = \gamma^*\left(x^{(i-2)} = \sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \tilde{t}^{(i-2)} = \Delta t^{(i-2)}\right) \quad (3.24)$$

ist durch nochmalige Verwendung von Gl. (3.7) berechenbar, was in Analogie zu (3.22)

$$\begin{aligned} \gamma^*\left(x^{(i-2)} = \sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \tilde{t}^{(i-2)} = \Delta t^{(i-2)}\right) \\ = \gamma_0^*\left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) + \left[\gamma^*(x^{(i-2)} = \sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \tilde{t}^{(i-2)} = 0) - \gamma_0^*\left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right)\right] \exp(-\bar{\nu} \Delta t^{(i-2)}) \\ = \gamma_0 \left\{ g\left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) + \left[\frac{1}{\gamma_0} \gamma^*\left(x^{(i-2)} = \sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \tilde{t}^{(i-2)} = 0\right) - g\left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right)\right] \right\} \exp(-\bar{\nu} \Delta t^{(i-2)}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

liefert. Mit (3.24) und (3.25) geht Gl. (3.23) über in

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) = \gamma_0 & \left\{ g(\Delta x^{(i-1)}) + \left[g\left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) - g(\Delta x^{(i-1)}) \right] \exp(-\bar{\nu} \Delta t^{(i-1)}) \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{\gamma_0} \gamma^* \left(x^{(i-2)} = \sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \tilde{t}^{(i-2)} = 0 \right) - g\left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) \right] \exp\left(-\bar{\nu} \sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta t^{(j)}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Durch die in diesem Abschnitt bis hierher durchgeführten Rechnungen wurde im wesentlichen $\gamma(x, t)$ unter zweimaliger Verwendung der Differentialgleichung (3.7) auf $\gamma^* \left(x^{(i-2)} = \sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \tilde{t}^{(i-2)} = 0 \right)$ zurückgeführt. Setzt man dieses Verfahren fort, so gewinnt man nach insgesamt i -maliger Verwendung der Gl. (3.7) eine Beziehung zwischen $\gamma(x, t)$ und $\gamma^* \left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \tilde{t}^{(0)} = 0 \right)$. Da offenbar

$$\gamma^* \left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)}, \tilde{t}^{(0)} = 0 \right) = \gamma^* \left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)}, t = 0 \right) = \gamma_0^* \left(\sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) = \gamma_0 g \left(\sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) \quad (3.27)$$

ist, lautet diese

$$\begin{aligned} \gamma(x^{(0)} = x, t) = \gamma_0 & \left\{ g\left(\sum_{j=i-1}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) \exp(-\bar{\nu} \cdot 0) + \left[g\left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) - g\left(\sum_{j=i-1}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) \right] \exp\left(-\bar{\nu} \sum_{j=i-1}^{i-1} \Delta t^{(j)}\right) \right. \\ & + \left[g\left(\sum_{j=i-3}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) - g\left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) \right] \exp\left(-\bar{\nu} \sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta t^{(j)}\right) \\ & + \dots \\ & \left. + \left[g\left(\sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) - g\left(\sum_{j=1}^{i-1} \Delta x^{(j)}\right) \right] \exp\left(-\bar{\nu} \sum_{j=1}^{i-1} \Delta t^{(j)}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Zur Berechnung von τ_B wird nach (2.3) $\left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t}$ benötigt. Da

$$\left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta x} \left(\gamma(x^{(0)} = x + \delta x, t) - \gamma(x^{(0)} = x, t) \right) \right] \quad (3.29)$$

ist, müssen wir, um $[\partial \gamma / \partial x^{(0)}]_{x^{(0)}=x; t}$ angeben zu können, neben der durch Gl. (3.28) gegebenen Größe $\gamma(x^{(0)} = x, t)$ noch $\gamma(x^{(0)} = x + \delta x, t)$ kennen. $\gamma(x^{(0)} = x + \delta x, t)$ läßt sich nach demselben Verfahren wie $\gamma(x^{(0)} = x, t)$ berechnen. Hierzu muß man die obigen Überlegungen nur insofern abändern, als man jetzt annimmt, zur Zeit $\tilde{t}^{(i)} = 0$ springe die Versetzung von $x^{(i-1)} = 0$ nach $x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)} + \delta x$ anstatt nach $x^{(i-1)} = \Delta x^{(i-1)}$. δx bedeutet also eine kleine virtuelle Verrückung ($\delta x \ll \Delta x^{(i-1)}$). Man überlegt sich leicht, daß die Durchführung dieser Rechnung zu dem Resultat führt, daß man $\gamma(x^{(0)} = x + \delta x, t)$ aus Gl. (3.28) erhält, indem man in den Argumenten der Funktionen g überall δx additiv hinzufügt. Entwickelt man die

Funktionen $g\left(\sum_{j=n}^{i-1} \Delta x^{(j)} + \delta x\right)$ in dem so gewonnenen Ausdruck für $\gamma(x^{(0)} = x + \delta x, t)$ in TAYLOR-Reihen um die Punkte $\sum_{j=n}^{i-1} \Delta x^{(j)}$ und setzt man $\gamma(x^{(0)} = x + \delta x, t)$ sowie Gl. (3.28) in (3.29) ein, so führt dies auf

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t} = \gamma_0 & \left\{ \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=i-1}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) \exp(-\bar{\nu} \cdot 0) \right. \\ & + \left[\frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=i-2}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) - \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=i-1}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) \right] \exp\left(-\bar{\nu} \sum_{j=i-1}^{i-1} \Delta t^{(j)}\right) \\ & + \dots \\ & \left. + \left[\frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) - \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) \right] \exp\left(-\bar{\nu} \sum_{j=1}^{i-1} \Delta t^{(j)}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Gl. (3.30) kann man weiter umformen, indem man mittels Gl. (3.12) die $\Delta t^{(j)}$ durch die $\Delta x^{(j)}$ ausdrückt. Ferner darf man die Intervalle $\Delta x^{(j)}$ als gleich groß voraussetzen ($\Delta x^{(j)} = \Delta x$ für alle j), ohne da-

durch eine Einschränkung der Allgemeinheit vorzunehmen. Denn weiter unten führen wir ja ohnehin den Grenzübergang $\Delta x^{(i)} \rightarrow 0$ durch. Beachtet man noch, daß $[\partial g / \partial x^{(0)}](0) = 0$ ist [vgl. Gl. (3.9)], so nimmt $[\partial \gamma / \partial x^{(0)}]_{x^{(0)}=x; t}$ folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t} &= \gamma_0 \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} (\Delta x) - \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} (0) \right] \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} \cdot 0 \Delta x \right) \right. \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} (\Delta x + \Delta x) - \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} (\Delta x) \right] \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} \cdot 1 \Delta x \right) \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} (2 \Delta x + \Delta x) - \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} (2 \Delta x) \right] \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} \cdot 2 \Delta x \right) + \dots \\ &\left. + \left[\frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} ((i-1) \Delta x + \Delta x) - \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} ((i-1) \Delta x) \right] \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} \cdot (i-1) \Delta x \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Entwickelt man die in den eckigen Klammern an erster Stelle stehenden Funktionen $\partial g / \partial x^{(0)}$ in TAYLOR-Reihen an der Stelle $x^{(0)} = 0$, $x^{(0)} = \Delta x$, $x^{(0)} = 2 \Delta x, \dots$ bzw. $x^{(0)} = (i-1) \Delta x$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t} &= \gamma_0 \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial x^{(0)2}} (0) \cdot \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} \cdot 0 \Delta x \right) \Delta x + \frac{\partial^2 g}{\partial x^{(0)2}} (\Delta x) \cdot \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} \cdot 1 \Delta x \right) \Delta x + \dots \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 g}{\partial x^{(0)2}} ((i-1) \Delta x) \cdot \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} \cdot (i-1) \Delta x \right) \Delta x \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Wenn man die Intervalle Δx differentiell klein wählt, so geht die Summation in (3.32) in eine Integration über:

$$\left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t} = \gamma_0 \int_{x^{(0)}=0}^x \frac{\partial^2 g}{\partial x^{(0)2}} (x^{(0)}) \cdot \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} x^{(0)} \right) dx^{(0)}. \quad (3.33)$$

Durch wiederholte partielle Integration läßt sich das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung teilweise auswerten, so daß man schließlich

$$\left[\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \right]_{x^{(0)}=x; t} = \gamma_0 \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} (x) \cdot \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} x \right) + \frac{\bar{v}}{u} \left[g(x) \cdot \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} x \right) - 1 + \frac{\bar{v}}{u} \int_0^x g(\xi) \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} \xi \right) d\xi \right] \right\} \quad (3.34)$$

erhält.

Mit den im Anhang 2 für spezielle Beispiele angegebenen Werten für γ_0 und r_0 , dem ESHELBYschen Ansatz (3.9) für $g(x)$ sowie dem Ausdruck (3.34) für $[\partial \gamma / \partial x^{(0)}]_{x^{(0)}=x; t}$ läßt sich der gesuchte Beitrag τ_B des induzierten SNOEK-Effektes zur Fließspannung mittels Gl. (2.3) berechnen. Da bei der Herleitung von (3.34) eine gleichförmige Bewegung der Versetzungen angenommen wurde, kann nach den Ausführungen des Abschnittes 2 auf diese Weise τ_B nur für Verformungstemperaturen ermittelt werden, die so hoch sind, daß $\tau_A = 0$ gesetzt werden darf.

Der Beitrag $\tau_{B\infty}$ zur stationären Fließspannung ergibt sich aus Gln. (2.3) und (3.34), wenn man in (3.34) $x = u t = \infty$ setzt, zu

$$\tau_{B\infty} = \frac{\gamma_0 \bar{v}}{u b} \left(\bar{v} \int_0^\infty g(u t) \exp(-\bar{v} t) dt - 1 \right). \quad (3.35)$$

Zu demselben Ergebnis kamen SCHÖCK und SEEGER⁵ unter Verwendung eines völlig anderen Verfahrens zur Bestimmung von $(\partial \gamma / \partial x^{(0)})_{x^{(0)}=x; t}$.

Da $(\partial \gamma / \partial x^{(0)})_{x^{(0)}=x; t}$ für $x = r_0$ ein Maximum besitzt, erhält man für den τ_B -Anteil der kritischen Schubspannung

$$\tau_{B0} = \frac{\gamma_0}{b} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x} (r_0) + \frac{\bar{v}}{u} g(r_0) \right] \exp \left(-\frac{\bar{v}}{u} r_0 \right) + \frac{\bar{v}}{u} \left[\bar{v} \int_0^{r_0/u} g(u t) \exp(-\bar{v} t) dt - 1 \right] \right\}. \quad (3.36)$$

Für $\bar{\nu} r_0/u \ll 1$, d. h. falls die Zeit r_0/u , welche eine Versetzung braucht, um ein Wegstück von der Länge des SNOEK-Wolken-Radius r_0 zu durchheilen, klein ist im Vergleich zur „Umorientierungsdauer“ $1/\bar{\nu}$ der Dipole in der SNOEK-Atmosphäre, vereinfacht sich (3.36) zu

$$\tau_{B0} = \frac{\gamma_0}{b} \frac{\partial g}{\partial x}(r_0) = -\frac{\gamma_0 g_0}{2 r_0 b}. \quad (3.37)$$

$[\partial g/\partial x](r_0)$ wurde hierzu aus Gl. (3.9) berechnet. Da zwar $r_0 \sim 1/kT$ ist (vgl. Anhang 2), $\bar{\nu}$ jedoch exponentiell mit T zunimmt und $u \sim \dot{a}$ gilt, ist Gl. (3.37) eine Näherung für nicht zu hohe Temperaturen und hinreichend hohe Abgleitgeschwindigkeiten. Gl. (3.37) wurde bereits von Eshelby⁶ unter Verwendung von (3.9) aus den Schöck-Seegeerschen Rechnungen hergeleitet.

Das von unseren bisherigen Rechnungen gelieferte neue Resultat ist somit die allgemeine Gl. (3.36) für τ_{B0} . Für ihre praktische Anwendung muß das Integral

$$I_1 = \bar{\nu} \int_0^{r_0/u} g(u t) \exp(-\bar{\nu} t) dt \quad (3.38)$$

ausgewertet werden. Mittels des Ansatzes (3.9) für $g(x)$ ergibt sich

$$I_1 = 1 - \exp(-h) - \frac{g_0}{2} h \int_0^1 \ln(1 + \xi^2) \exp(-h \xi) d\xi, \quad (3.39)$$

wobei

$$h = \bar{\nu} r_0/u \quad (3.39 a)$$

gesetzt wurde. Da in dem Integral

$$I_2 = \int_0^1 \ln(1 + \xi^2) \exp(-h \xi) d\xi \quad (3.40)$$

die Integration über den Bereich $0 \leq \xi \leq 1$ auszuführen ist, kann für $\ln(1 + \xi^2)$ die Reihenentwicklung

$$\ln(1 + \xi^2) = - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu} \xi^{2\mu} \quad (3.41)$$

verwendet werden. Benützt man außerdem noch die Integrationsformel

$$\begin{aligned} & \int \xi^n \exp(-h \xi) d\xi \\ &= \exp(-h \xi) \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{n!}{(n-\nu)!} \frac{\xi^{n-\nu}}{(-h)^{\nu+1}}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

so läßt sich I_2 als folgende Doppelsumme anschreiben:

$$I_2 = \exp(-h) \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{2\mu} \frac{(-1)^\mu}{h^{\nu+1} \cdot (2\mu-\nu)!} - \frac{(-1)^\mu}{h^{2\mu+1}} \frac{(2\mu)!}{\mu} \right] \right\}. \quad (3.43)$$

Aus (3.36), (3.38), (3.39), (3.40) und (3.43) erhält man eine erste Näherung für τ_{B0} , wenn man in (3.43) aus der Summe über μ nur das Glied mit $\mu=1$ mitnimmt,

$$\begin{aligned} \tau_{B0} \approx & \frac{-\gamma_0 g_0}{2 b r_0} \left\{ \frac{2}{h} [1 - \exp(-h)] \right. \\ & \left. + \exp(-h) [(\ln 2 - 1) h - 1] \right\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Gl. (3.44) trägt der Tatsache Rechnung, daß bei sehr hohen Temperaturen oder sehr niedrigen Abgleitgeschwindigkeiten τ_{B0} stark abnimmt, da die SNOEK-Wolken dann die Tendenz haben, den startenden Versetzungen zu folgen. Dieser Effekt ist in Gl. (3.37) nicht enthalten; nach ihr ist τ_{B0} T -unabhängig, denn sowohl $\gamma_0 g_0$ als auch r_0 sind $\sim 1/kT$ (vgl. Anhang 2).

3.3. Die Berechnung von τ_B für tiefe Temperaturen

Unter „tiefen Temperaturen“ wollen wir in diesem Zusammenhang Temperaturen verstehen, bei denen $\tau_A \neq 0$ ist. Bei solchen Temperaturen zwingen die kurzreichenden Wechselwirkungskräfte der elastischen Dipole die Versetzungen zu einer ruckweisen Bewegung, wie sie in I, Abschnitt 7.1, beschrieben wurde. Dies hat zur Folge, daß der Beitrag τ_B des induzierten SNOEK-Effektes zur Fließspannung ein anderer sein wird als im Fall hoher Temperaturen (Abschnitt 3.2), in dem die Versetzungen allein unter dem Einfluß des induzierten SNOEK-Effektes stehen und sich viskos bewegen.

Die Auswirkungen der ruckartigen Versetzungsbewegung auf τ_B lassen sich dadurch berücksichtigen, daß man die im vorangegangenen Abschnitt definierten Intervalle $\Delta x^{(i)}$ mit den nach (I, 7.1) zu berechnenden Aktivierungsschritten $\eta^{(i)}$ identifiziert:

$$\Delta x^{(i)} = \eta^{(i)} b. \quad (3.45)$$

Wir wollen den τ_B -Anteil $\tau_B^{(i)}$ der Fließspannung berechnen, der — zusätzlich zu dem τ_A -Anteil $\tau_A^{(i)}$ (vgl. I) — aufgebracht werden muß, um eine Versetzung an den i -ten Hindernissen vorbeizuführen, die sie seit Beginn einer plastischen Verformung zum

Verweilen zwangen. Hierzu muß man die Größe

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)}, t = \Theta^{(i+1)} \right)$$

kennen. [Zwischen $\Theta^{(i)}$ und den Verweilzeiten $t^{(i)}$ besteht die Beziehung (I, 7.8).] Analog zu unserem Vorgehen in Abschnitt 3.2 wollen wir zunächst

$$\gamma \left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)}, t = \Theta^{(i+1)} \right)$$

ermitteln. Wie man sich leicht klarmacht, ergibt sich diese Größe aus der rechten Seite der Gl. (3.28) dadurch, daß man die Ersetzungen

$$g \left(\sum_{j=i-n}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) \rightarrow g \left(\sum_{j=i-n+1}^{i-1} b \eta^{(j)} \right) \quad \text{für } n \neq 1,$$

$$g \left(\sum_{j=i-1}^{i-1} \Delta x^{(j)} \right) \rightarrow g(0) = 1,$$

$$\exp \left(-\bar{\nu} \sum_{j=i-n}^{i-1} \Delta t^{(j)} \right) \rightarrow \exp \left(-\bar{\nu} \sum_{j=i-n+1}^i t^{(j)} \right) \quad \text{für alle } n$$

vornimmt.

Verfährt man zur Ermittlung von $\frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)}, t = \Theta^{(i+1)} \right)$ aus $\gamma \left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)}, t = \Theta^{(i+1)} \right)$ entsprechend wie in Abschnitt 3.2, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \tau_B^{(i)} &= \frac{1}{b} \frac{\partial \gamma}{\partial x^{(0)}} \left(x^{(0)} = \sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)}, t = \Theta^{(i+1)} \right) \\ &= \frac{\gamma_0}{b} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} (b \eta^{(i-1)} \exp(-\bar{\nu} t^{(i)})) \right. \\ &\quad + \left[\frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=i-2}^{i-1} b \eta^{(j)} \right) - \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} (b \eta^{(i-1)}) \right] \exp \left(-\bar{\nu} \sum_{j=i-1}^i t^{(j)} \right) \\ &\quad + \dots \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)} \right) - \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} b \eta^{(j)} \right) \right] \exp \left(-\bar{\nu} \sum_{j=1}^i t^{(j)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Verweilzeiten $t^{(j)}$ in Gl. (3.46) lassen sich nach (I, 7.6) durch die Aktivierungsschrittlängen $\eta^{(j)}$ ausdrücken. Die Berechnung der letzteren wurde in I erörtert.

Der τ_B -Anteil $\tau_{B\infty}$ der stationären Fließspannung τ_∞ , welcher nach Gl. (3.46) als $\tau_B^{(\infty)}$ zu berechnen ist, stellt sich als unendliche Reihe dar. Den Beitrag τ_{B0} zur kritischen Schubspannung τ_0 erhält man aus (3.46) als $\tau_B^{(\mu)}$, wobei $\tau_A^{(i)} + \tau_B^{(i)}$ für $i = \mu$ ein Maximum besitzt.

4. Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung τ_0

Wie setzen sich nun die Beiträge τ_{A0} und τ_{B0} zur kritischen Schubspannung zusammen (vgl. Abb. 2)?

Da die kurzreichenden Wechselwirkungen zu thermisch aktivierten Prozessen Anlaß geben, existiert eine Temperatur T_2' , oberhalb der alle $\tau_A^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) Null sind. Um die nachfolgende Diskussion nicht unnötig zu erschweren, wollen wir annehmen, daß die $\tau_A^{(i)}$ näherungsweise alle gleich sind.

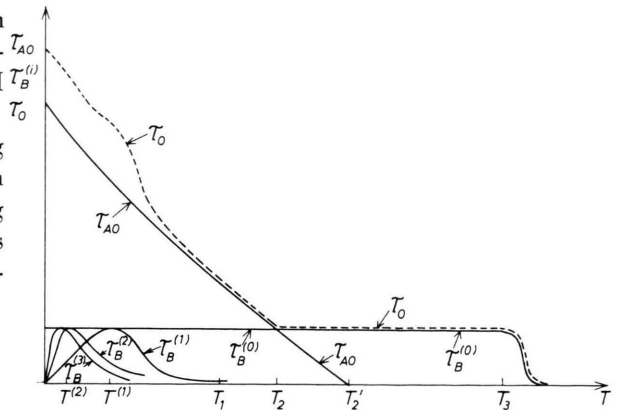


Abb. 2. Zur Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung eines kubischen Kristalls infolge der Wechselwirkung zwischen umorientierungsfähigen elastischen Dipolen und Versetzungen (schematische Darstellung, bei der der Bereich $0^\circ\text{K} < T < T_1$ stark gedehnt und der Bereich $T_1 < T < T_2$ stark verkürzt wird).

Damit ist τ_{A0} über den ganzen Bereich $0^\circ\text{K} < T < T_2'$ eindeutig festgelegt. Die Erweiterung der Diskussion für den Fall, daß $\tau_A^{(i)}$ von i abhängt, bereitet keine zusätzlichen Schwierigkeiten.

Im Temperaturbereich $T > T_2'$ ist $\tau_0 = \tau_{B0}$, wobei τ_{B0} nach Gl. (3.36) zu berechnen ist.

Für nicht zu hohe Temperaturen, sagen wir für $T_2' < T < T_3$, vereinfacht sich Gl. (3.36) zu Gl. (3.37), d. h. in diesem Temperaturgebiet ist τ_0 T -unabhängig. [Der durch (3.37) definierte, T -unabhängige τ_{B0} -Wert wird im folgenden mit $\tau_B^{(0)}$ abgekürzt.] Physikalisch läßt sich dies folgendermaßen interpretieren: Die Versetzungen werden aus den SNOEK-Potentialmulden herausbewegt, ohne daß sich diese währenddessen deformieren. Diese von (bei $x^{(0)} = 0$) ruhenden Versetzungen induzierten SNOEK-Potentialmulden sind nach (3.8) und (3.9) durch die Beziehung

$$\gamma_0^*(x^{(0)}) = \gamma_0 g_0 \ln \left(\frac{r_*^2}{r_0^2 + x^{(0)2}} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

analytisch beschreibbar. In Abb. 1 ist eine solche Potentialmulde wiedergegeben. Sie hat die „Tiefe“ γ_0 ($\sim 1/kT \ln(r_*/r_0)$) und die „Breite“ $2r_0$ ($\sim 1/kT$). Die für τ_{B0} maßgebliche Stelle steilster Steigung liegt bei $x^{(0)} = r_0$. Mit abnehmender Temperatur wird die Mulde gleichzeitig breiter und tiefer. Gl. (3.37) besagt also, daß sich hierbei die Steigung an der Stelle $x^{(0)} = r_0$ nicht ändert.

Oberhalb T_3 muß zur Berechnung von τ_{B0} die ausführliche Gl. (3.36) verwendet werden. In diesem Temperaturgebiet fällt nämlich τ_{B0} rasch auf Null ab, weil die SNOEK-Wolken sich beim Start der Versetzungen deformieren und den Bewegungen der Versetzungen folgen wollen.

Bevor wir den τ_0 -Verlauf für $T < T_2'$ diskutieren, wollen wir Gl. (3.46) noch etwas vereinfachen. Da im Temperaturgebiet $T_2' < T < T_3$ die SNOEK-Wolken sich während des Verformungsbeginns nicht merklich deformieren, wird dies im Bereich $T < T_2'$ erst recht nicht der Fall sein. Deshalb dürfen wir bei der Berechnung der $\tau_B^{(i)}$ nach Gl. (3.46) $\bar{v} = 0$ setzen. Unter Verwendung von Gl. (3.9) führt dies auf

$$\begin{aligned} \tau_B^{(i)} &= \frac{\gamma_0}{b} \frac{\partial g}{\partial x^{(0)}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)} \right) \\ &= - \frac{\gamma_0 g_0}{b} \frac{\sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)}}{\left(\sum_{j=0}^{i-1} b \eta^{(j)} \right)^2 + r_0^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nach Voraussetzung sollen alle $\tau_A^{(i)} = \tau_{A0}$ sein. Dies ist nach I nur dann der Fall, wenn der mittlere Dipolabstand in den Gleitebenen $A^{(i)}$ nicht von i abhängt. Nach (I, 7.1) und (I, 7.2) heißt dies, daß

die in (4.2) eingehenden Größen $\eta^{(j)}$ in folgender Weise zusammenhängen:

$$2\eta^{(0)} = \eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \dots = \eta^{(\infty)}. \quad (4.3)$$

Damit geht (4.2) in

$$\tau_B^{(i)} = -\gamma_0 g_0 \frac{(2i-1)\eta^{(0)}}{[(2i-1)\eta^{(0)}b]^2 + r_0^2} \quad (4.4)$$

über.

Die T -Abhängigkeit von τ_0 für $T < T_2'$ versteht man am besten, wenn man sich von T_2' ausgehend die Verformungstemperatur allmählich erniedrigt denkt. Dabei geschieht zweierlei: Erstens wird unterhalb T_2' $\tau_{A0} \neq 0$ und steigt mit fallender Temperatur an. Zweitens verbreitern sich die SNOEK-Potentialmulden. Dadurch fällt der erste Dipol, mit dem eine Versetzung nach ihrem Start in kurzreichende Wechselwirkung treten kann und welcher für großes T außerhalb ihrer Mulde lag, in den Bereich ihrer Mulde. Beim Passieren dieses Hindernisses muß deshalb zusätzlich zu τ_{A0} die nach (4.4) zu berechnende Spannung $\tau_B^{(1)}$ aufgebracht werden.

Um den Temperaturverlauf von $\tau_B^{(1)}$ qualitativ einzusehen, stelle man sich vor, die Potentialmulde bleibe undeformiert und der Ort $x^{(0)} = b\eta^{(0)}$ des Dipols werde mit abnehmender Temperatur zum Ursprung hin verschoben (vgl. Abb. 1). Da $\tau_B^{(1)}$ proportional zur Steigung der Mulde am jeweiligen Ort des Dipols ist, nimmt $\tau_B^{(1)}$ mit abnehmender Temperatur zunächst zu, durchläuft bei einer Temperatur $T^{(1)}$ sein Maximum $\tau_B^{(0)}$ und fällt schließlich auf Null ab. Der Anstieg mit abnehmender Temperatur beginnt wie $1/T$, der Abfall für $T \rightarrow 0$ erfolgt linear [vgl. Gl. (4.4); $\gamma_0 g_0$ und r_0 sind proportional $1/kT$].

Den Temperaturverlauf des zum Passieren des i -ten Dipols aufzubringenden τ_B -Anteils $\tau_B^{(i)}$ überlegt man sich auf entsprechende Weise. Er besitzt denselben Charakter wie $\tau_B^{(1)}$. Seinen Maximalwert $\tau_B^{(0)}$ hat $\tau_B^{(i)}$ bei der Temperatur

$$T^{(i)} = [1/(2i-1)] T^{(1)}. \quad (4.5)$$

Unsere Aussagen über die Temperaturabhängigkeit von τ_0 können wie folgt zusammengefaßt werden: Definiert man eine Temperatur T_2 dadurch, daß für sie $\tau_B^{(0)} = \tau_{A0}(T_2) + \tau_B^{(1)}(T_2)$ gelten soll – T_2 ist kleiner als T_2' –, so ist im Bereich $T > T_2$

$$\tau_0 = \tau_{B0},$$

wobei τ_{B0} durch Gl. (3.36) gegeben ist. Für $T < T_2$ setzt sich τ_0 aus τ_{A0} und demjenigen $\tau_B^{(i)}$ zusammen,

das bei der betreffenden Temperatur am größten ist. $\tau_B^{(i)}$ ist nach Gl. (4.4) zu berechnen.

Von praktischem Interesse ist, daß in vielen Fällen unterhalb T_2 ein breiter Bereich $T_1 < T < T_2$ existiert, in dem $\tau_B^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) $\ll \tau_{A0}$ und somit $\tau_0 \approx \tau_{A0}$ ist.

5. „Eingefrorene“ Snoek-Wolken

Bisher hatten wir stillschweigend vorausgesetzt, die zu verformenden Kristalle würden hinreichend langsam auf die Verformungstemperatur gebracht, um vor Verformungsbeginn die Ausbildung von SNOEK-Wolken im thermischen Gleichgewicht um die ruhenden Versetzungen herum sicherzustellen. Insbesondere bei niedrigen Verformungstemperaturen ist dies jedoch nicht möglich. Vielmehr werden in diesen Fällen um die ruhenden Versetzungen herum SNOEK-Wolken „eingefroren“, welche einer Orientierungsverteilung der Dipole bei einer „Einfrieretemperatur“ T_e entsprechen, die oberhalb der Verformungstemperatur T liegt. Solche eingefrorenen SNOEK-Wolken können sich während der Verformung nicht deformieren, d. h. wir müssen in den oben abgeleiteten Gleichungen für τ_B die „Umorientierungs-Frequenz“ $\bar{\nu}$ in den SNOEK-Wolken gleich Null setzen. Außerdem geht in die die SNOEK-Wolken charakterisierenden Größen γ_0 und τ_0 die Einfrieretemperatur T_e an Stelle der Verformungstemperatur T ein.

Der Beitrag τ_{B0} zur kritischen Schubspannung ist beim Vorliegen von eingefrorenen SNOEK-Wolken durch Gl. (3.37) oder (4.4) gegeben, je nachdem, ob $T > T_2$ oder $T < T_2$ ist; der Beitrag $\tau_{B\infty}$ zur stationären Fließspannung ist in beiden Fällen gleich Null [vgl. Gl. (3.35) bzw. (3.46)].

Herrn Professor Dr. A. SEEGER möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für wertvolle Diskussionen über dieses Thema herzlich danken.

Anhang

1. Umformung der Gl. (3.4) auf die Gestalt (3.5)

Nach Gl. (I, 7.11) ist

$$\omega_{kl} = \beta_{kl} \omega_k. \quad (\text{A } 1.1)$$

β_{kl} gibt die Zahl der Wege an, über die ein Dipol mittels eines Umklapp-Prozesses aus der Orientierung k in die Orientierung l gelangen kann. Ist ein Zustand l mittels eines Umklapp-Prozesses aus k nicht erreichbar,

so ist für diesen $\beta_{kl} = 0$. Aus Symmetriegründen ist β_{kl} für alle Zustände l , welche von k aus mittels eines Umklapp-Prozesses eingenommen werden können, gleich, d. h. β_{kl} hängt für diese nicht von l ab. Da außerdem alle Ausgangszustände für einen Umklapp-Vorgang wegen der Symmetrie des Problems gleichwertig sind, hängen die von Null verschiedenen β_{kl} auch nicht von k ab. Sind von den $q-1$ Zuständen, in denen sich ein Dipol außer dem Ausgangszustand k befinden kann, q^* durch einmaliges Umklappen erreichbar und kann dies über β verschiedene Wege geschehen, so ist

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq k)}}^q \beta_{kl} = q^* \beta. \quad (\text{A } 1.2)$$

Mit Hilfe von (A 1.1) und (A 1.2) geht (3.4) über in

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -q^* \beta \sum_{k=1}^q W_k \omega_k C_k + \sum_{k=1}^q W_k \left(\sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq k)}}^{q^*} \beta \omega_l C_l \right). \quad (\text{A } 1.3)$$

Da die Summe über die Wechselwirkungsenergien W_k aller möglichen Dipolorientierungen verschwindet ($\sum_{k=1}^q W_k = 0$), vereinfacht sich (A 1.3) zu

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -q^* \beta \sum_{k=1}^q W_k \omega_k C_k. \quad (\text{A } 1.4)$$

Fassen wir die q möglichen Zustände in zwei Gruppen von q_1 und q_2 zusammen, wobei einem Zustand der 1. Gruppe bzw. der 2. Gruppe im Mittel die Wechselwirkungsenergie \bar{W}_1 bzw. \bar{W}_2 zukommt, so gilt

$$\sum_{k=1}^q W_k = q_1 \bar{W}_1 + q_2 \bar{W}_2 = 0. \quad (\text{A } 1.5)$$

Verwendet man an Stelle der Umklapp-Frequenzen ω_k näherungsweise entsprechend gemittelte Größen $\bar{\omega}_k$, so folgt aus (A 1.4) und (A 1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} &= -q^* \beta \left[\bar{W}_1 \bar{\omega}_1 \sum_{k=1}^{q_1} C_k + \bar{W}_2 \bar{\omega}_2 \sum_{k'=q_1+1}^q C_{k'} \right] \\ &= -q^* \beta \bar{W}_1 \left[\bar{\omega}_1 \sum_{k=1}^{q_1} C_k - \frac{q_1}{q_2} \bar{\omega}_2 \sum_{k'=q_1+1}^q C_{k'} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A } 1.6)$$

$$\text{Mit} \quad \sum_{k=1}^{q_1} C_k + \sum_{k'=q_1+1}^q C_{k'} = C \quad (\text{A } 1.7)$$

(C Gesamtkonzentration der Dipole) läßt sich (A 1.6) auf die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} &= -\frac{q^*}{q} \beta (q_2 \bar{\omega}_1 + q_1 \bar{\omega}_2) \\ &\cdot \left\{ \bar{W}_1 \left[\frac{q}{q_2} \sum_{k=1}^{q_1} C_k - \frac{q_1}{q_2} C \right] - \bar{W}_1 q_1 \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{q_2 \bar{\omega}_1 + q_1 \bar{\omega}_2} C \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A } 1.8)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\varrho &= \sum_{k=1}^q \overline{W}_k C_k = \overline{W}_1 \sum_{k=1}^{q_1} C_k + \overline{W}_2 \sum_{k'=q_1+1}^{q_1} C_{k'} \\ &= \overline{W}_1 \sum_{k=1}^{q_1} C_k - \frac{q_1 \overline{W}_1}{q_2} \left(C - \sum_{k=1}^{q_1} C_k \right) \quad (\text{A 1.9}) \\ &= \overline{W}_1 \left[\frac{q}{q_2} \sum_{k=1}^{q_1} C_k - \frac{q_1}{q_2} C \right]\end{aligned}$$

und im Falle des Gleichgewichts

$$\varrho_0 = \overline{W}_1 \left[\frac{q}{q_2} \sum_{k=1}^{q_1} C_{0k} - \frac{q_1}{q_2} C \right] \quad (\text{A 1.10})$$

mit

$$\begin{aligned}C_{0k} &= \frac{\exp(-\overline{W}_k/kT)}{\sum_{k'=1}^q \exp(-\overline{W}_{k'}/kT)} C \\ &\approx \frac{\exp(-\overline{W}_1/kT)}{q_1 \exp(-\overline{W}_1/kT) + q_2 \exp(-\overline{W}_2/kT)} C. \quad (\text{A 1.11})\end{aligned}$$

(A 1.10) läßt sich mit Hilfe von (A 1.11) auf folgende Gestalt bringen:

$$\varrho_0 = \overline{W}_1 q_1 \frac{\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1}{q_2 \overline{\omega}_1 + q_1 \overline{\omega}_2} C. \quad (\text{A 1.12})$$

Aus (A 1.8), (A 1.9) und (A 1.12) erhält man

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \frac{q^*}{q} \beta (q_2 \overline{\omega}_1 + q_1 \overline{\omega}_2) (\varrho - \varrho_0). \quad (\text{A 1.13})$$

Im Rahmen der von SCHÖCK und SEEGER⁵ vorgeschlagenen Näherung ist

$$\overline{\omega}_1 \approx \overline{\omega}_2 \approx \nu, \quad (\text{A 1.14})$$

wobei ν die durch Gl. (I, 7.11) definierte Umlapp-Frequenz der Dipole in großer Entfernung von den Versetzungen ist. Wegen $q_1 + q_2 = q$ vereinfacht sich Gl. (A 1.13) mit der Näherung (A 1.14) zu Gl. (3.5).

2. γ_0 und r_0 für einige Gleitsysteme und Dipol-Typen in k.f.z. Gittern

SCHÖCK und SEEGER⁵ haben γ_0 und r_0 für das k.r.z. Gitter mit Schraubenversetzungen der Gleitsysteme $\{110\}/\langle 111 \rangle$ und $\langle 100 \rangle$ -Dipolen berechnet. Wir wollen

diese Größen für einige wichtige Gleitsysteme und Dipol-Typen in k.f.z. Strukturen angeben.

- a) Stufenversetzungen der Gleitsysteme $\{110\}/\langle 110 \rangle$ und $\langle 110 \rangle$ -Dipole in k.f.z. Strukturen (z. B. bei Alkalihalogeniden mit Dipolen aus zweiwertigen Kationen mit angelagerten Leerstellen)

Setzt man die Poissonsche Zahl gleich 1/3, so ergibt sich

$$\gamma_0 = -0,81 \frac{\sqrt{2}}{b^3} c \frac{P^2}{kT} \ln \frac{r_*}{r_0}, \quad (\text{A 2.1 a})$$

$$r_0 = 0,014 \frac{P}{kT}, \quad (\text{A 2.1 b})$$

$$P = \frac{3\sqrt{2}}{8\pi} \mu b^4 \Delta\lambda^* \quad (\text{A 2.1 c})$$

(μ Schubmodul; $\Delta\lambda^*$ Dipolstärke, vgl. I).

c in (A 2.1 a) bedeutet die atomare Gesamtkonzentration, C in den Formeln weiter oben dagegen die Volumkonzentration.

- b) Schraubenversetzungen der Gleitsysteme $\{110\}/\langle 110 \rangle$ und $\langle 110 \rangle$ -Dipole in k.f.z. Strukturen (z. B. Alkalihalogenide mit Dipolen aus zweiwertigen Kationen mit angelagerten Leerstellen)

$$\gamma_0 = - \frac{\sqrt{2}\pi}{b^3} c \frac{P^2}{kT} \ln \frac{r_*}{r_0}, \quad (\text{A 2.2 a})$$

$$r_0 = \frac{P}{e^{2,12} kT}, \quad (\text{A 2.2 b})$$

$$P = \frac{\mu b^4 \Delta\lambda^*}{4\pi}. \quad (\text{A 2.2 c})$$

- c) Schraubenversetzungen der Gleitsysteme $\{111\}/\langle 110 \rangle$ und $\langle 100 \rangle$ -Dipole in k.f.z. Strukturen (z. B. Zwischengitteratome in der Hantel-Lage in Al oder Cu nach Elektronenbestrahlung)

$$\gamma_0 = -0,67 \frac{\sqrt{2}\pi}{b^3} c \frac{P^2}{kT} \ln \frac{r_*}{r_0}, \quad (\text{A 2.3 a})$$

$$r_0 = \frac{P}{e^{1,71} kT}, \quad (\text{A 2.3 b})$$

$$P = \frac{\mu b^4 \Delta\lambda^*}{2\sqrt{2}\pi}. \quad (\text{A 2.3 c})$$